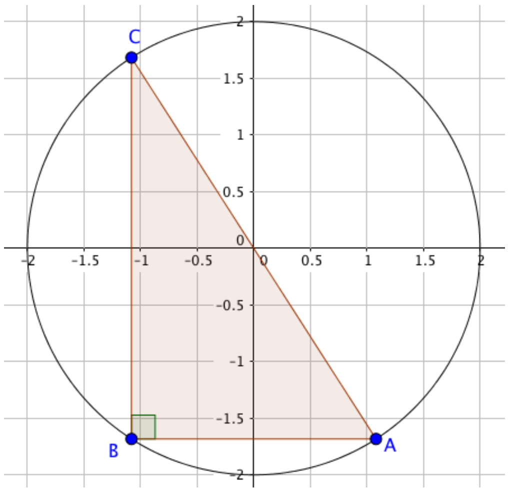
Wiskunde oefentoets hoofdstuk 10: Meetkundige berekeningen

Iedere antwoord dient gemotiveerd te worden, anders worden er geen punten toegekend. Gebruik van grafische rekenmachine is toegestaan. Succes!

Driehoek in cirkel

Gegeven is de cirkel $c_1 : x^2 + y^2 = 4$. In deze cirkel kunnen rechthoekige driehoeken worden gemaakt. Deze ontstaan door de punten A, B en C in het vierde, derde respectievelijk tweede kwart op de cirkelrand te nemen. Volgens de Stelling van Thales moet de lijn AC dan altijd door de oorsprong gaan. Zie figuur.



Voor deze opgave beschouwen we alleen de driehoeken waarvoor $AB < BC$.

4pt 1. Bereken in vijf decimalen nauwkeurig wat de lengte van BC is, in het geval dat de oppervlakte van ΔABC een kwart is van de oppervlakte van cirkel c_1.

Neem vanaf nu aan dat $C(-1, \sqrt{3})$. Lijn k is de raaklijn in A en lijn l is de raaklijn in B.

2pt 2. Bereken de afstand van punt C tot de lijn k.

7pt 3. Bewijs dat het snijpunt van de raaklijnen k en l gegeven is door $\left(0, -\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)$.

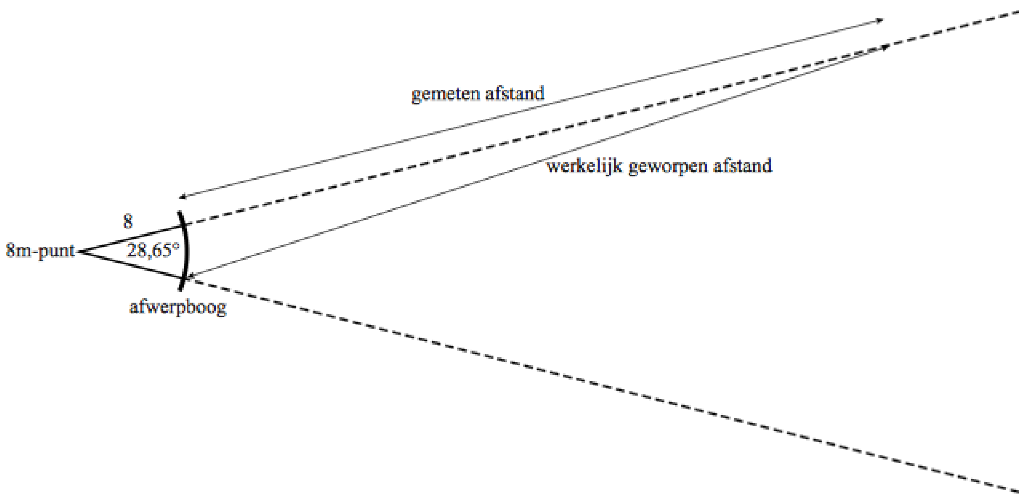
Examen 2017 - I

Een atleet gooit een speer vanaf de **afwerpboog**. Dit si een deel van de cirkel met het zogeheten 8m-punt als middelpunt en straal van 8 meter. De speer moet landen in het gebied binnen twee lijnen die een hoek van 28,65^o met elkaar maken. Deze twee lijnen snijden elkaar in het 8m-punt.

De **gemeten afstand** wordt als volgt gemeten:

- trek een rechte lijn vanaf de plek waar de speer landt tot het 8m-punt;
- de lengte van het deel van deze lijn van de plek waar de speer landt tot de afwerpboog, is de gemeten afstand.

Door deze manier van meten kan het voorkomen dat er een verschil is tussen de werkelijk geworpen afstand en de gemeten afstand. In de figuur staat hiervan een bovenaanzicht.

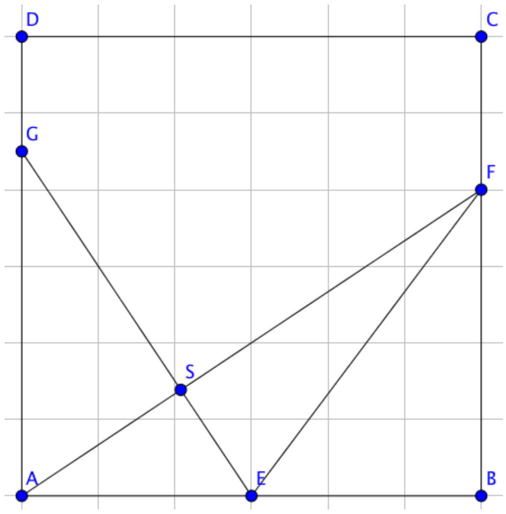


De winnaar van het speerwerpen bij de mannen op de Olympische Spelen van 2012 won met een gemeten afstand van 84,58 meter. Als hij zou hebben geworpen volgens de situatie in de figuur, dan zou zijn werkelijk geworpen afstand groter zijn geweest.

4pt 4. Bereken in hele centimeters nauwkeurig het verschil tussen de gemeten afstand en de werkelijk geworpen afstand in deze situatie.

Vierkant en driehoek

Gegeven is een vierkant $ABCD$, met zijden zes. Verder is gegeven dat $AE = BE$, $BF = 2CF$ en $AG = 3DG$.



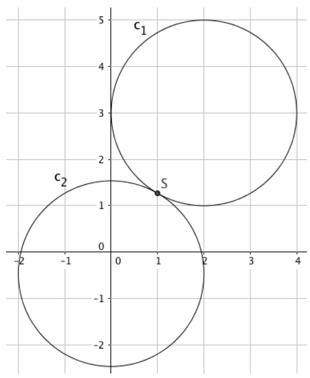
3pt 5. Bewijs dat $\angle FSG = 90^o$.

5pt 6. Bereken de lengte van lijnstuk GS.

Cirkels en raaklijnen

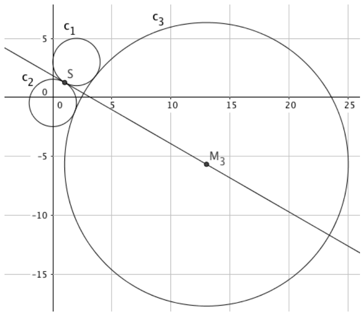
Gegeven zijn de cirkels: $c_1 : x^2 - 4x + y^2 - 6y + 9 = 0$ en $c_2 : x^2 + (y + a)^2 = 4$. De cirkels raken elkaar in het punt S. Zie figuur hiernaast.

De waarde van a is ongeveer 0,46.



3pt 7. Bereken de exacte waarde van a.

De raaklijn k aan de cirkel c_1 en c_2 wordt gegeven door $y = -\frac{1}{3}\sqrt{3}x + 3 - \frac{2}{3}\sqrt{3}$. Cirkel c_3 raakt aan cirkel c_2 en c_1, en het middelpunt ligt op de lijn k. Verder is gegeven dat de afstand tussen middelpunten van c_1 en c_3 gelijk is aan 14.

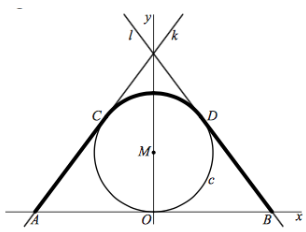


4pt 8. Bepaal de cirkelvergelijking van c_3. Rond je waarden af op twee decimalen.

Examen 2017 - II

De cirkel c met middelpunt $M(0,5)$ is gegeven door $x^2 + (y-5)^2 = 25$. De punten $C(-4,8)$ en $D(4,8)$ liggen op de cirkel. De lijn k is de raaklijn aan c in punt C en de lijn l is de raaklijn aan c in punt D. Punt A is het snijpunt van k met de x-as en punt B is het snijpunt van l met de x-as. De coördinaten van B zijn $(10,0)$.

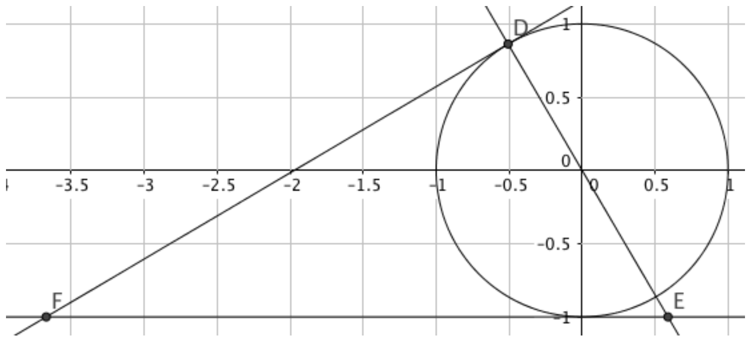
Tussen A en B wordt denkbeeldig een touwtje gspannen dat over de cirkel heen gaat. Het touwtje is zo gespannen dat het tussen C en D precies over de cirkel ligt. Het touwtje is recht tussen A en C en tussen D en B. Zie figuur.



5pt 9. Bereken in één decimaal nauwkeurig de lengte van het touwtje.

Cirkel en driehoek

Gegeven is de cirkel: $c : x^2 + y^2 = 1$. De horizontale raaklijn aan deze cirkel is de lijn $y = -1$. De lijn $y = -px$, met $p > 1$, snijdt de cirkel in een punt D en de lijn $y = -1$ in het punt E. In het punt D kan een raaklijn aan de cirkel worden opgesteld. Deze raaklijn snijdt de lijn $y = -1$ in punt F. Zie figuur.



2pt 10. Toon aan dat $\angle DFE$ gelijk is aan $\tan^{-1}\left(\frac{1}{p}\right)$.

2pt 11. Toon aan dat E gegeven wordt door $\left(\frac{1}{p}, -1\right)$.

4pt 12. Toon aan dat D gegeven wordt door $\left(-\sqrt{\frac{1}{p^2+1}}\,,\ p \cdot \sqrt{\frac{1}{p^2+1}}\right)$.

Verder kun je punt F uitdrukken in p, en dat geeft: $\left(-p - \sqrt{p^2+1}, -1\right)$. Mocht je het leuk vinden, probeer deze dan ook aan te tonen.

3pt 13. Toon aan dat de oppervlakte van ΔDEF gelijk is aan $\frac{1}{2}\left(p \cdot \sqrt{\frac{1}{p^2+1}} + 1\right)\left(\frac{1}{p} + p + \sqrt{p^2+1}\right)$.

EINDE — Harm van Deursen — 2017